UFR de Mathématiques et Informatique
Filières Professionnalisées
// MIAGE-GI //
TEST DE SELECTION 1ère ANNEE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré à rendre avec la copie.
Il est permis d'utiliser la calculatrice scientifique.
Les exercices sont indépendants et à rédiger avec soin et rigueur.

EXERCICE 1 (5 points)

Un joueur dispose d'une urne contenant trois boules rouges, quatre boules blanches et n boules vertes. Les boules sont indiscernables au toucher.

1) Le joueur tire au hasard une boule de l'urne.
   Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   - R : « la boule tirée est rouge » ;
   - B : « la boule tirée est blanche » ;
   - V : « la boule tirée est verte » ;
2) Le joueur décide de jouer une partie ; celle-ci se déroule de la manière décrite ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne :
   - Si cette boule est rouge, il gagne 16 euros ;
   - Si cette boule est blanche, il perd 12 euros ;
   - Si cette boule est verte, il remet la boule dans l'urne puis tire à nouveau une boule de l'urne :
     - Si cette boule est rouge, il gagne 8 euros ;
     - Si cette boule est blanche, il perd 2 euros ;
     - Si cette boule est verte, il ne perd, ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont supposés indépendants.
Au début de la partie, le joueur possède 12 euros.
Soit X la variable aléatoire réelle qui prend pour valeur, la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un ou deux tirages selon le cas).

a) Déterminer les valeurs prises par X
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Montrer que l'espérance mathématique de X est :

$$E(x) = \frac{16n}{(n+7)^2} + 12$$

3) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x+7)^2}$.
   a) Etudier les variations de f.
   b) En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique est maximale.
   c) Calculer cette valeur maximale.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C telles que : $Z_A = 4i$; $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$; $Z_C = -2\sqrt{3} + 2i$.

1) Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes Z_A, Z_B et Z_C.

3) Démontrer que le triangle OBA est équilatéral. (On pourrait écrire $\frac{Z_B}{Z_A}$ sous la forme trigonométrique)

4) Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

5) On désigne par K le milieu du segment $[OA]$ et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K.

a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment $[AC]$.

c) En déduire que l'image par S de la médiatrice du segment $[AC]$ est la droite (OI).

PROBLÈME (10 points)

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x)=3+(x-1)e^{-x}$.

1) Calculer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x)=(2-x)e^{-x}$.

3) Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

4)

a) Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2[$, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α.

b) Démontrer que $-1<\alpha<0$.

5) En déduire le signe de h(x)

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ $par\ f(x)=3x+1-xe^{-x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2 cm).

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
(On pourra mettre x en facteur dans l'expression de f(x)).

2) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x)=h(x)$.

3) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=3x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5) Etudier la position relative de (Δ) et (C).

6) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

7) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

8) Tracer (Δ), (T) et (C). (On prendra $\alpha = 0{,}6\ et\ f(\alpha) = 0{,}3$).

9) Soit λ un nombre réel strictement positif.

a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_0^{\lambda} xe^{-x}\,dx$.

b) Calculer l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.

c) Calculer la limite A de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

d) Hachurer, sur la figure, la partie du plan dont l'aire est égale à A.

Bonne chance à tous